موسسه تدریس خصوصی

مدرسین تهران

- تدریس خصوصی دروس دانشگاهی: مقاطع دکتری، کارشناسی ارشد، کارشناسی
- آموزش نرم‌افزارهای تخصصی: تمامی رشته های مهندسی
- ترجمه متون تخصصی: تمامی رشته های دانشگاهی
- با همکاری اساتید دانشگاه ها: خانم و آقا

Modaresine Tehran

۰۲۱-۷۷۴۹۹۹۲۵

۰۹۲۱-۲۰۲۸۲۹۵

آدرس سایت : www.ModaresineTehran.com

پست الکترونیک: ModaresineTehran@gmail.com

کانال تلگرام تهران مرکز: @Konj_Markaz

بسمه تعالی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز

اداره ...

سؤالات امتحانی پایان ترم نیمسال ...

۹۳-۹۴-۲

مدرسین تهران
Modaresine Tehran

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی:

نام درس: ریاضی ۲ نام استاد: کلیه اساتید تاریخ امتحان: ۹۴/۳/۲۸

تاریخ اعلام نمره اولیه: تاریخ اعلام نمره نهایی:

ضمناً نمرات در سایت stu.iauctb.ac.ir اعلام خواهد شد و دانشجویان جهت مشاهده نمرات و اعتراض به این سایت مراجعه نمایند.

ردیف	سؤال	بارم
۱-	فرض کنید ... (سؤال خط خورده است)	۱٫۵
۲-	منحنی C به معادله $\vec r(t)=(\cos t)\vec i+(2\sin t)\vec j+(\cos t)\vec k$ مفروض است. انحنا و تاب منحنی را در t دلخواه بدست آورید.	۲
۳-	هرگاه $f(x-z, y-z)=0$ و f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید: $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$	۲
۴-	طبق مقررات پستی، باید مجموع ارتفاع و محیط قاعده یک بسته پستی حداکثر L واحد باشد. ابعاد حجیم‌ترین مکعب مستطیلی را بیابید که در این شرط صدق کند.	۲
۵-	انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:	
	الف) $\iint_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dA$ ؛ R ناحیه محدود به ذوزنقه با رئوس (۰,۱)، (۱,۰)، (۰,۲) و (۲,۰) است.	۲
	ب) $\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ؛ D ناحیه بالای صفحه $z=1$ و داخل کره $x^2+y^2+z^2=2z$ است.	۱٫۵
۶-	به کمک قضیه گرین $\oint_C (2x^2y^3+e^{x^2})dx+(4x^3y^2-y)dy$ را محاسبه کنید که در آن C مرز ناحیه محدود به منحنی $y=x^3$، خط $y=1$ و محور y است.	۲٫۵
۷-	میدان برداری $\vec F=(1+x)e^{x+y}\vec i+(xe^{x+y}+2y)\vec j-2z\vec k$ مفروض است.	۲٫۵
	الف) نشان دهید $\vec F$ پایستار (کنسرواتیو) است.	
	ب) انتگرال $\int_C \vec F\cdot d\vec r$ را بدست آورید، هرگاه C منحنی به معادله $\vec r(t)=(1-t)e^t\vec i+t\vec j+2t\vec k$ $(0\le t\le 1)$ باشد.	
۸-	درستی قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $\vec F=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ و S سطح ناحیه محدود به سهمیگون $z=4-x^2-y^2$ و صفحه $z=3$ تحقیق کنید.	۳

موفق باشید
گروه علوم پایه

(۹۴۰۳)

۲ منحنی C به معادله $r(t)=(\cos t)i+(2\sin t)j+(\cos t)k$ مفروض است. انحنا و تاب C در t دلخواه بدست آورید.

$$\vec{r} = \cos t,\ 2\sin t,\ \cos t$$

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}} = -\sin t,\ 2\cos t,\ -\sin t \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t + \sin^2 t}$$

$$= \sqrt{(2\sin^2 t + 2\cos^2 t) + 2\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{2(1+\cos^2 t)}$$

$$\vec{a}=\ddot{\vec{r}} = -\cos t,\ -2\sin t,\ -\cos t$$

انحنا $k = \dfrac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3} = \ldots$

$$k = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & 2\cos t & -\sin t \\ -\cos t & -2\sin t & -\cos t \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{2(1+\cos^2 t)}\right)^3} = \frac{\left|(-2\cos^2 t - 2\sin^2 t)\,i - (\sin t\cos t - \sin t\cos t)\,j + (2\sin^2 t + 2\cos^2 t)\,k\right|}{\left(\sqrt{2(1+\cos^2 t)}\right)^3}$$

(زیر جمله‌ها: -2، 0، 2)

$$k = \frac{\sqrt{4+4}}{\left(\sqrt{2(1+\cos^2 t)}\right)^3}$$

تاب $\tau = \dfrac{\begin{vmatrix} v \\ a \\ a' \end{vmatrix}}{|v\times a|^2} = \dfrac{\begin{vmatrix} -\sin t & 2\cos t & -\sin t \\ -\cos t & -2\sin t & -\cos t \\ \sin t & -2\cos t & +\sin t \end{vmatrix}}{(\sqrt{8})^2}$

$$\tau = \frac{[2\sin^3 t - 2\sin t\cos^2 t - 2\sin t\cos^2 t] - [+2\sin^3 t - 2\sin t\cos^2 t - 2\sin t\cos^2 t]}{8}$$

$$\tau = \frac{0}{8} = 0 \Rightarrow$$ یعنی تابع فوق انحنا ندارد

(۳) هرگاه $f(x-y, y-z)=0$ و f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید.

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

حل:

$u=x-y$

$v=y-z$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

با جایگذاری داریم

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+1\dfrac{\partial z}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}\end{cases}$$

$\Rightarrow f(u,v)=0$

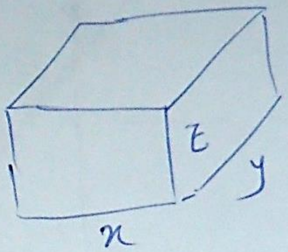
$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=1$

مدرسین تهران
Modaresine Tehran

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}}_{1}=0+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\Rightarrow 1=\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}$$

(۴) مجموع ارتفاع و محیط قاعده یک مکعب حداکثر L باشد، حجیم‌ترین مکعب مستطیل کدام است.



حجم $V = x \times y \times z$

(L حداکثر) قید $\Rightarrow L = z + 2(x+y)$

از max شدن داریم:

$$u = xyz - \lambda\left(z + 2(x+y) - L\right)$$

$$\begin{cases} u_x = yz - 2\lambda = 0 & (\times x) \\ u_y = xz - 2\lambda = 0 & (\times -y) \\ u_z = xy - \lambda = 0 & (\times -z) \\ z + 2(x+y) = L \end{cases}$$

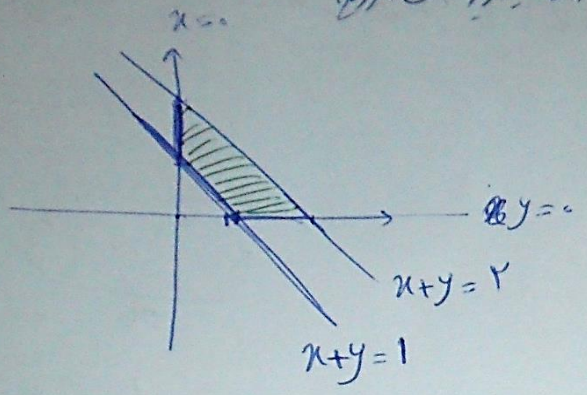
$$\Rightarrow \begin{cases} xyz - 2\lambda x = 0 \\ -xyz + 2\lambda y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda(y-x) \Rightarrow \boxed{y = x}$$

$$\begin{cases} (1)\ xyz - 2\lambda x = 0 \\ (2)\ -xyz + \lambda z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{2x = z}$$

$$\Rightarrow 3z = L \Rightarrow \boxed{z = \frac{L}{3}} \quad \boxed{x = \frac{L}{6}},\ \boxed{y = \frac{L}{6}}$$

$$z + 2(x+y) = \frac{L}{3} + 2\left(\frac{L}{6} + \frac{L}{6}\right) = L$$

۵) انتگرال $\iint \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA$ را روی ناحیه زیر بدست آورید.



حل: با استفاده از تغییر متغیر داریم

$$\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases}$$

جمع: $2x=u+v \Rightarrow x=\frac{u+v}{2}$

کم: $2y=v-u \Rightarrow y=\frac{v-u}{2}$

لذا ناحیه به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{cases} v: 1 \to 2 \\ u: -v \to v \quad (x=0,\ y=0) \\ dx\,dy = |J|\,du\,dv \end{cases}$$

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \iint \cos\frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy=\int_1^2\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\,\frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$=\int_1^2 -\frac{1}{2}\sin\frac{u}{v}\Big]_{-v}^{v}\,dv=-\frac{1}{2}\int_1^2\left(\sin\frac{v}{v}-\sin\frac{-v}{v}\right)dv$$

$$=-\frac{1}{2}\int \sin 1-\sin(-1)\,dv=-\int_1^2\sin 1\,dv=-\sin 1$$

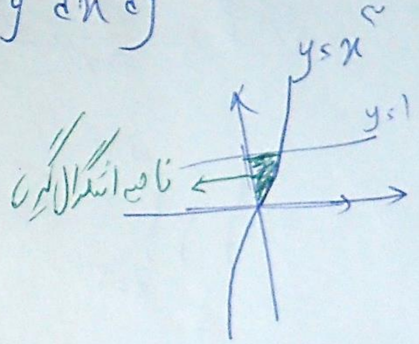
جهت دریافت نمونه سوالات دانشگاهی و پاسخ آنها به سایت مدرسین تهران مراجعه نمایید.
@Konj_Markaz www.ModaresineTehran.com

(۶) به کمک قضیه گرین، $\oint_C (\underbrace{2x^2y^3+e^{x^2}}_{P})dx+(\underbrace{4x^3y^2-y}_{Q})dy$ را در ناحیه محصور $y=x^3$ و $y=1$ و محور y محاسبه کنید.

* حل: طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

$$I=\iint 12x^2y^2-4x^2y^2\,dx\,dy=\iint 8x^2y^2\,dx\,dy$$



$$I=\int\int_{y=x^3}^{1}8x^2y^2\,dy\,dx=\int\left[\frac{8}{3}x^2y^3\right]_{x^3}^{1}dx$$

$$I=\int_0^1\frac{8}{3}x^2-\frac{8}{3}x^{29}\,dx=\frac{8}{9}x^3-\frac{8}{90}x^{30}\Big]_0^1=\frac{8}{9}-\frac{8}{90}=\frac{72}{90}$$

$$\boxed{I=\frac{8}{9}}$$

ریاضی ۲ تهران مرکز (۹۴۰۳)

۷) الف) نشان دهید میدان برداری $\vec{f} = \underbrace{(1+x)e^{x+y}}_{P}\,\vec{i} + \underbrace{(xe^{x+y} + 2y)}_{Q}\,\vec{j} \underbrace{- 2z}_{R}\,\hat{k}$ پایستار است.

ب) انتگرال $\int \vec{f}\cdot d\vec{r}$ را روی منحنی $r(t) = (1-t)e^{t}\,\hat{i} + t\,\hat{j} + 2t\,\hat{k}$ در $0 \le t \le 1$ بدست آورید.

حل: برای پایستار بودن باید کرل f ($\nabla \times f$) برابر صفر شود لذا داریم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow (1+x)e^{x+y} = 1e^{x+y} + xe^{x+y} \checkmark \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \Rightarrow 0 = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

لذا پایستار است. حال باید تابع پتانسیل را بدست آوریم و چون انتگرال مستقل از مسیر است باید نقطه ۲ را از نقطه ۱ کم کنیم.

$$\int P\,dx = \int (1+x)e^{x+y}\,dx = (1+x)e^{x+y} + e^{x+y}$$

$$\int Q\,dy = \int xe^{x+y} + 2y\,dy = xe^{x+y} + y^2$$

$$\int R\,dz = \int -2z\,dz = -z^2$$

$$\Rightarrow U = (2+x)e^{x+y} + y^2 - z^2 \quad , \quad \begin{cases} t=0 \rightarrow (1,0,0) \\ t=1 \rightarrow (0,1,2) \end{cases}$$

$$U(0,1,2) - U(1,0,0) = (2e + 1 - 4) - 3e = \boxed{-e-3}$$

جهت دریافت نمونه سوالات دانشگاهی و پاسخ آنها به سایت مدرسین تهران مراجعه نمایید.
@Konj_Markaz		www.ModaresineTehran.com

عمران مرکز (۹۴-۹۵)

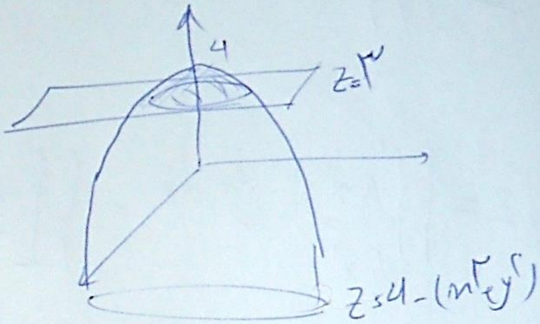
۸) درستی قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ و S سطح ناحیه محدود به سهمیگون $z = 4 - x^2 - y^2$ و صفحه $z = 3$ تحقیق کنید.

$P = x,\ Q = y,\ R = z$

حل: طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\, ds = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dv$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$



$$= \iiint_{z=3}^{4-(x^2+y^2)} 3\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iint 3z\Big]_{z=3}^{4-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

$$= \iint 3\left(4-(x^2+y^2)-3\right) dx\, dy$$ از مختصات قطبی خواهیم داشت

$$= \iint (12 - 3r^2 - 9)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{1} (3 - 3r^2)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{3r^4}{4}\right]_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\, d\theta = \frac{5}{4}(2\pi) = \frac{5}{2}\pi$$